INACAP
www.inacap.cl

AREA ELECTRICIDAD ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

GUÍA: INTEGRALES

Área de EET

1. INTEGRALES

1.1 La Integral Indefinida.

1.1.1 Conceptos Básicos

Sea y = f(x) derivable respecto a x en D. Tenemos entonces que $\frac{dy}{dx} = f^{'}(x)$ o $dy = f^{'}(x)\,dx$, es decir, hemos encontrado la derivada y la diferencial de la función y = f(x) respecto a: x. También, a cada función y = f(x) le corresponde una única función derivada: $f^{'}(x)$ o una única diferencial dy = $f^{'}(x)\,dx$. Considerando el proceso inverso: dada $f^{'}(x)$ o $dy = f^{'}(x)\,dx$ si queremos encontrar y = f(x) obtendremos infinitas funciones cuya derivada es $f^{'}(x)$ o cuya diferencial es $f^{'}(x)\,dx$.

Ejemplo 1: A y = f(x) = 3x + 5 le corresponde una única función derivada $f^{'}(x) = 6x$ o una única diferencial dy = 6x dx respecto a x en □ , pero esta derivada o diferencial lo es de infinitas funciones, como ser: $3x^2 + 5$, $3x^2 + 6$, $3x^2 - 5$, $3x^2 + \frac{1}{2}$,........., $3x^2$, funciones que difieren entre sí solo en la constante aditiva. Notemos que $3x^2$ es la más simple de ellas y que si C es una constante $3x^2 + C$ representa a todas las funciones anteriores para los distintos valores que asignemos a C.

Las consideraciones anteriores conducen a los siguientes hechos. Dada $f^{'}(x)$ o $dy = f^{'}(x)\,dx$, el hecho de encontrar y = f(x) se llama Integrar $f^{'}(x)$ o Integrar $f^{'}(x)\,dx$, lo que se anota:

$$\int dy = \int f^{'}(x)\,dx$$

es decir: $y = \int f^{'}(x)dx$

Tenemos entonces que " la notación $\int f'(x)dx$ representa a todas las funciones que al ser derivadas respecto a x dan $f'(x)$, o a todas las funciones cuya diferencial es $f'(x)$ dx".

En $\int f'(x)dx$, $\int$ es el símbolo de la integral, dx: Que es la diferencial de la variable independiente, indica la variable respecto de la cual se ha derivado la función para obtener $f'(x)$ o $f'(x)$ dx, y respecto de la cual hay que integrar. La función $f'(x)$ ubicada entre los dos símbolos anteriores se llama La función Integrando.

La función que se obtiene al integrar $\int f'(x)dx$ se llama la Integral Indefinida, La Antiderivada o la función Primitiva de $f'(x)$ en D, y corresponde a un conjunto de infinitas funciones (cada una de ellas es una integral indefinida o una antiderivada o una función primitiva) que difieren entre sí únicamente en una constante aditiva llamada La Constante de Integración .

"Si f(x) es una integral indefinida de $f'(x)$ en D entonces f(x) + C denota a todas las integrales indefinidas de $f'(x)$ en D:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

Observación : $dy = f'(x)\ dx$ entonces $\int dy = \int f'(x)dx$

1.1.2 Tablas de Integrales Básicas

Basados en los teoremas sobre derivación, podemos establecer:

1) $\int dx = \int 1\,dx = x + C$

2) $\int k\,dx = kx + C \qquad k: \text{constante}$

3) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)dx \qquad k: \text{constante}$

4) $\int \left(f(x) + g(x) - h(x)\right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$

5) $\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad , \ r \in \mathbb{R}, \quad r \neq -1$

6) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

7) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad a \in \mathbb{R}^+$

8) $\int e^x\,dx = e^x + C$

9) $\int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x + C$

10) $\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + C$

11) $\int \tan x\ dx = \ln \sec x + C$

12) $\int \cot x\ dx = \ln \operatorname{sen} x + C$

13) $\int \sec x\ dx = \ln(\sec x + \tan x) + C$

14) $\int \operatorname{cosec} x\ dx = \ln(\operatorname{cosec} x - \cot x) + C$

15) $\int \sec^2 x \ dx = \tan x + C$

16) $\int -\operatorname{cosec}^2 x \ dx = \cot x + C$

$\int \operatorname{cosec}^2 x \ dx = -\cot x + C$

17) $\int \sec x \cdot \tan dx = \sec x + C$

18) $\int -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x \ dx = \operatorname{cosec} x + C$

$\int -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x \ dx = -\operatorname{cosec} x + C$

19) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \ \operatorname{sen} x + C$

20) $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \ \cos x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\operatorname{arc} \ \cos x + C$

21) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \ \tan x + C$

22) $\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \ \cot x + C$

23) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arc} \ \sec x + C$

24) $\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arc} \ \operatorname{cosec} x + C$

1.1.3 Integración Inmediata

Son aquellas integraciones que se hacen aplicando directamente las fórmulas anteriores.

Ejemplo 1: Calcular $\int x^7 dx$

Resolución : La fórmula 5) da :

$$\int x^7 dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + C = \frac{x^8}{8} + C$$

Ejemplo 2: Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$

Resolución : La fórmula 5) da :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{4}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + C = 4\sqrt[4]{x} + C$$

Ejemplo 3: Calcular $\int \left(7^x - 5\cos x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

Resolución : La fórmula 4) da :

$$\int 7^x dx - \int 5\cos x \, dx + \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\frac{7^x}{\ln 7} - 5\int \cos x \, dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\frac{7^x}{\ln 7} - 5\,\mathrm{sen}\, x + 3\,\mathrm{arc\,sen}\, x + C$$

Ejemplo 4: Calcular $\int \frac{7}{x}\,dx$

Resolución : La fórmula 6) da : $\int \frac{7}{x}\,dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx = 7\ln x + C_1$

o $= 7\ln x + \ln C$

o $= \ln C x^7$

1.1.4 Uso de una función auxiliar para las integrales inmediatas.

La derivación de funciones compuestas (Regla de la Cadena) da origen a muchas funciones que para ser integradas con seguridad requieren el uso de una función auxiliar. Para ello, en las fórmulas anteriores se reemplazan: la expresión que contiene a la variable x (o parte de ella) por una adecuada función u = u(x), y dx por la correspondiente du. Se integra y luego se vuelve a la variable original x. Así por ejemplo, la fórmula $\int x^r\,dx$ se puede considerar también como $\int u^r\,du$ donde aparece u^r una función elevada a un exponente, multiplicada por la diferencial de la base : u^r du.

Del mismo modo $\int \frac{1}{x}\,dx$ queda $\int \frac{du}{u}$: la diferencial du dividida por la función u.

Las restantes fórmulas se interpretan análogamente. Los ejemplos a continuación aclaran la técnica.

Ejemplo 1: Calcular $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$

Resolución : No podemos usar la fórmula 9) directamente. Usamos una función auxiliar: u = 2x luego du = 2 dx, luego dx = $\frac{du}{2}$. Reemplazando:

$$\int \operatorname{sen} 2x\,dx = \int \operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{2}\cdot(-\cos u) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Ejemplo 2: Calcular $\int \frac{5}{3-x}\,dx$

Resolución : $\int \frac{5}{3-x}\,dx = 5\int \frac{1}{3-x}\,dx$, la fórmula 6) sugiere u = 3 – x luego du = -dx $\therefore$ dx = -du.

Reemplazando:

$$5\int \frac{1}{3-x}\,dx = 5\int \frac{1}{u}\cdot(-du) = -5\int \frac{1}{u}\,du = -5\ln u + C_1$$

$$= -5\ln(3-X) + C_1 = -\ln(3-x)^5 + \ln C = \ln \frac{C}{(3-x)^5}$$

Ejemplo 3: Calcular $\int \left(x^3-5\right)^4 \cdot 3x^2\,dx$

Resolución : Es una potencia multiplicada por la diferencial de la base, la fórmula 5): $\int u^r\,du$ sugiere, la fórmula 6) sugiere $u = x^3 - 5$ $\therefore$ $du = 3x^2\,dx$.

Reemplazando:

$$\int \left(x^3-5\right)^4 \cdot 3x^2\,dx = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\left(x^3-5\right)^5}{5} + C$$

Ejemplo 4: Calcular $\int e^{-x}\,dx$

Resolución : u = - x, du = - dx $\therefore$ dx = - du.

Reemplazando:

$$\int e^{-x}\,dx = \int e^{u}\,(-du) = -\int e^{u}\,du = -e^{u} + C = -e^{-x} + C$$

Ejemplo 5: Calcular $\int \frac{\operatorname{cosec}\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,dx$

Resolución : Usamos $\int \operatorname{cosec} u\, du$, con $u=\sqrt{x}$ $\therefore$ $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ $\therefore$ $dx = 2\sqrt{x}\,du$.

Reemplazando:

$$\int \frac{\operatorname{cosec}\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\operatorname{cosec} u}{3\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\; du = \frac{2}{3}\int \operatorname{cosec} u\; du$$

$$= \frac{2}{3}\ln(\operatorname{cosec} u - \cot u) + C = \frac{2}{3}\ln\left(\operatorname{cosec}\sqrt{x} - \cot\sqrt{x}\right) + C$$

Ejemplo 6: Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$

Resolución : Usamos $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$, con $u = x\sqrt{3}$; $du = \sqrt{3}\;dx$ $\therefore$ $dx = \frac{du}{\sqrt{3}}$.

Reemplazando:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\;dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin u + C = = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x\sqrt{3} + C$$

Ejemplo 7: Calcular $\int \frac{dx}{x^2 + 14x + 52}$

Resolución : Usando $\int \frac{1}{1+u^2}\;du$: $x^2 + 14x + 52 = (x+7)^2 + a$.

$$52 = 49 + a \;\therefore\; a = 3$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2+14x+52} = \int \frac{dx}{3+(x+7)^2} = \int \frac{dx}{3\left[1+\left(\frac{x+7}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}$$

$$\therefore u=\frac{x+7}{\sqrt{3}} \;\therefore\; du=\frac{1}{\sqrt{3}}dx \;\therefore\; dx=\sqrt{3}\,du$$

Reemplazando:

$$\int \frac{dx}{x^2+14x+52} = \int \frac{\sqrt{3}\,du}{3\left[1+u^2\right]} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan u + C$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+7}{\sqrt{3}}\right) + C$$

AREA ELECTRICIDAD ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

INACAP
www.inacap.cl

GUIA DE EJERCICIOS N° 4

$1 - .\int x^3\ dx \qquad = \dfrac{x^4}{4} + C$

$2 - .\int \sqrt[3]{x}\ dx \qquad = \dfrac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$

$3 - .\int \dfrac{dx}{x^2} \qquad = -\dfrac{1}{x} + C$

$4 - .\int \dfrac{dz}{\sqrt[3]{z^2}} \qquad = 3\sqrt[3]{z} + C$

$5 - .\int \left(2x^2 - 5x + 3\right) dx \qquad = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 3x + C$

$6 - .\int (1 - t)\sqrt{t}\ dt \qquad = \dfrac{2t\sqrt{t}}{3} - \dfrac{2t^2\sqrt{t}}{5} + C$

$7 - .\int (3s + 4)^2\ ds \qquad = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C$

$8 - .\int \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\ dx \qquad = \dfrac{x^2}{2} + 5x + \dfrac{4}{x} + C$

$9 - .\int \dfrac{dz}{z} \qquad = \ln z + C \ \text{ o } \ln Cz$

$10 - .\int \dfrac{dx}{x + 2} \qquad = \ln(x + 2) + C$

$11-.\int \frac{ds}{2s+3}$ $= \frac{1}{2}\ln(2s+3)+C$

$12-.\int \frac{t\,dt}{t^2-1}$ $= \ln C\sqrt{t^2-1}$

$13-.\int \frac{x^2dx}{1-2x^3}$ $= \ln\left(\frac{C}{\sqrt[6]{1-2x^3}}\right)$

$14-.\int \frac{x+2}{x+1}\,dx$ $= x+\ln(x+1)+C$

$15-.\int e^{-x}\,dx$ $= -e^{-x}+C$

$16-.\int e^{3x}dx$ $= \frac{e^{3x}}{3}+C$

$17-.\int a^{2x}dx$ $= \frac{a^{2x}}{2\ln a}+C$

$18-.\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $= -e^{\frac{1}{x}}+C$

$19-.\int \left(e^x+1\right)^3 e^x dx$ $= \frac{\left(e^x+1\right)^4}{4}+C$

$20-.\int \frac{dx}{e^x+1}$ $= x-\ln(1+e^x)+C$

$21-.\int \left(x^3+2\right)^2 3x^2dx$ $= \frac{\left(x^3+2\right)^3}{3}+C$

$22 - .\int \left(x^3+2\right)^{\frac{1}{2}} x^2\,dx \qquad = \frac{9}{2}\left(x^3+2\right)^{\frac{3}{2}} + C$

$23 - .\int \frac{8x^2dx}{\left(x^3+2\right)^3} \qquad = -\frac{4}{3\left(x^3+2\right)^2} + C$

$24 - .\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx \qquad = \frac{4\sqrt[4]{\left(x^3+2\right)^3}}{9} + C$

$25 - .\int \operatorname{sen}(\frac{x}{2})\,dx \qquad = -2\cos(\frac{x}{2}) + C$

$26 - .\int \cos 3x\,dx \qquad = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$

$27 - .\int 2\operatorname{tg} 3x\,dx \qquad = \frac{2}{3}\ln\sec 3x + C$

$28 - .\int 4\operatorname{cosec}\left(\frac{5x}{2}\right)dx \qquad = \frac{8}{5}\ln\left|\operatorname{cosec}\frac{5x}{2} - \cot\frac{5x}{2}\right| + C$

$29 - .\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx \qquad = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

$30 - .\int \operatorname{tg} 2x\,dx \qquad = \frac{1}{2}\ln\sec 2x + C$

$31 - .\int x\cot x^2 dx \qquad = \frac{1}{2}\ln\operatorname{sen} x^2 + C$

$32 - .\int \left(1+\operatorname{tg} x\right)^2 dx \qquad = \operatorname{tg} x + 2\ln\sec x + C$

$33.-\int \sec^2 2ax\,dx \qquad = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}2ax + C$

$34.-\int \frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x}\,dx \qquad = \ln \sec x + x + C$

$35.-\int \frac{\operatorname{sen}y}{\cos^2 y}\,dy \qquad = \sec y + C$

$36.-\int e^x \cos e^x\,dx \qquad = \operatorname{sen}e^x + C$

$37.-\int e^{3\cos 2x}\operatorname{sen}2x\,dx \qquad = -\frac{e^{3\cos 2x}}{6} + C$

$38.-\int \frac{dz}{1+\cos z} \qquad = -\cot z + \operatorname{cosec} z + C$

$39.-\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad = 2\ln\left|\sec\sqrt{x} + \operatorname{tg}\sqrt{x}\right| + C$

$40.-\int (\operatorname{tg}2x + \sec 2x)^2\,dx \qquad = \operatorname{tg}2x + \sec 2x - x + C$

$41.-\int \frac{\sec x\operatorname{tg}x}{a+b\sec x}\,dx \qquad = \frac{1}{b}\ln|a+b\sec x| + C$

$42.-\int \frac{dx}{9+x^2} \qquad = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

$43.-\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} \qquad = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sec}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$

$44-.\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx \qquad = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen} x^4 + C$

$45-.\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \qquad = \operatorname{arc\,tg} e^x + C$

$46-.\int \frac{3x-5}{x^2+4}dx \qquad = \frac{3}{2}\ln(x^2+4) - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

$47-.\int \frac{dx}{x^2-6x+11} \qquad = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right) + C$

$48-.\int \frac{x-5}{x^2+2x+4}dx \qquad = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+4\right| - 2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

$49-.\int \frac{dx}{\sqrt{20-4x-x^2}} \qquad = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+2}{\sqrt{24}}\right) + C$

$50-.\int x^2\sqrt{1-x}\,dx \qquad = \frac{-2}{105}(1-x)^{\frac{3}{2}}\left(15x^2+12x+8\right) + C$

$51-.\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx \qquad = \frac{1}{15}\sqrt{2x-1}\left(3x^2+2x-13\right) + C$

$52-.\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx \qquad = x + \frac{1}{x+1} + C$

1.2 Métodos de Integración

1.2.1 Integración por partes.

Sean u = u (x), v = v (x). Entonces $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ en donde

d (uv) = u dv + v du integrando obtenemos:

$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$

$uv = \int u\,dv + \int v\,du \quad \therefore$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Fórmula de la Integración por Partes

Para aplicar ésta fórmula, la función que se desea integrar debe ser un producto de funciones. En la integral, éste producto se separa en dos factores uno de los cuales debe continuar a dx. Uno de ellos se iguala a dx, y el que contiene a dx se iguala a dv. No hay normas para la separar los factores, pero $\int v\,du$ debe ser una integral inmediata o más simple que $\int u\,dv$.

Ejemplo 1: Calcular $\int x \cos x \, dx$

Resolución : De acuerdo a la fórmula de la integración por partes: x cos x dx = u dv

¿ Cuáles son u y dv ?

Hay varias posibilidades:

u	dv
x	cos x dx
cosx	x dx
x cos x	dx
1	x cos x dx

Ensayando el primer caso: $u = x$ $\quad dv = \cos x \, dx$

$\therefore du = dx \qquad \therefore v = \text{sen}\, x$

Aplicando textualmente la fórmula:

$$\int x \cos x \, dx = x \,\text{sen}\, x - \int \text{sen}\ x \, dx$$
$$= x \ \text{sen}\ x - \left(-\cos x\right) + C$$
$$= x \ \text{sen}\, x + \cos x + C$$

.... resultó de inmediato !

Si hubiéramos ensayado el segundo caso:

$u = \cos x \qquad dv = x \, dx$

$\therefore du = -\text{sen}\, x \, dx \qquad \therefore v = \dfrac{x^2}{2}$

la fórmula habría dado:

$$\int x \cos x \, dx = \frac{x}{2} \cos x - \int \frac{x^2}{2}(-\text{sen}\ x) \, dx = \frac{x}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \ \text{sen}\ x \ dx$$

de donde $\int v \, du$ es mas complicada que $\int u \, dv$ de ..... la separación falla

Ejemplo 2: Calcular $\int x\, e^{2x}\, dx$

Resolución : **Sean:** $u = x$ $\quad dv = e^{2x}\, dx$

$$\therefore du = dx \qquad \therefore v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\begin{aligned}\int x\, e^{2x}\, dx &= x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx \\ &= x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C \\ &= \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C\end{aligned}$$

Observación : Frecuentemente al aplicar la integración por partes la integral $\int v\, du$ Resulta ser más simple que $\int u\, dv$, sin ser una integral inmediata. En estos casos se calcula aparte.

Ejemplo 3: Calcular $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

Resolución : Sean: $u = x^2$ $\quad dv = \operatorname{sen} x\, dx$

$$\therefore du = 2x\, dx \qquad \therefore v = -\cos x$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx &= x^2 (-\cos x) - \int (-\cos x)\, 2x\, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx \qquad (*)\end{aligned}$$

$\therefore \int v\, du$ que es $\int x \cos x\, dx$ es más simple que $\int u\, dv$ que es

$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$, sin ser una integral inmediata

Calculándola aparte con el mismo tipo de separación:

Para $\int x \cos x \, dx$: $u = x$ $dv = \cos x \, dx$

$\therefore du = dx$ $\therefore v = \operatorname{sen} x$

$$\therefore \int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

que sustituida en $(*)$:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

Observación : También la integración por partes se utiliza para el cálculo de integrales más simples, pero no inmediatas.

Ejemplo 4: Calcular $\int \ln x \, dx$

Resolución : Sean: $u = \ln x$ $dv = dx$

$\therefore du = \frac{1}{x} dx$ $\therefore v = x$

$$\therefore \int \ln x \, dx = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

Ejemplo 5: Calcular $\int \operatorname{arc} \cos x \, dx$

Resolución : Sean: $u = \operatorname{arc} \cos x$ $dv = dx$

$\therefore du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\therefore v = x$

$$\therefore \int \operatorname{arc} \cos x \, dx = (\operatorname{arc} \cos x) \cdot x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= x \operatorname{arc} \cos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTO

$1-.\int \ln x \, dx =$	$x(\ln x - 1) + C$
$2-.\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx =$	$-\frac{1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) + C$
$3-.\int \sqrt{x}\ln^2 x \, dx =$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left[\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right] + C$
$4-.\int x e^{\frac{x}{2}} dx =$	$2x e^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C$
$5-.\int x^2 e^{-3x} \, dx =$	$-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C$
$6-.\int x \operatorname{sen} x \, dx =$	$-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$
$7-.\int x\cos nx \, dx =$	$\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + C$
$8-.\int \arccos 2x \, dx =$	$x \arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$
$9-.\int x^2 \cos x \, dx =$	$x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$
$10-.\int x^2 \ln 2x \, dx =$	$\frac{x^3}{3}\ln 2x - \frac{x^3}{9} + C$
$11-.\int x\sqrt{3x-5} \, dx =$	$\frac{2x(3x-5)^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{4(3x-5)^{\frac{5}{2}}}{135} + C$

12.- $\int \frac{x\,e^{x}}{(1+x)^{2}}\,dx = \qquad \frac{e^{x}}{1+x}+C$

13.- $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx = \qquad 2\sqrt{x+1}\,\left(\ln[x+1]-2\right)+C$

14.- $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = \qquad x-\frac{1-x^{2}}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$

15.- $\int \frac{\operatorname{arc\,sen}\,x}{x^{2}}\,dx = \qquad -\frac{\operatorname{arc\,sen}x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^{2}}}{x}\right|+C$

16.- $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)dx = \qquad x\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\sqrt{1+x^{2}}+C$

17.- $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \qquad -\sqrt{x}+(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$

18.- $\int \operatorname{sen}x\,\ln(\operatorname{tg}x)dx = \qquad \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\ln\operatorname{tg}x+C$

19.- $\int x\operatorname{sen}^{2}x\,dx = \qquad -\frac{x^{2}}{4}-\frac{x}{4}\operatorname{sen}2x-\frac{\cos 2x}{8}+C$

20.- $\int e^{\sqrt{x}}dx = \qquad 2(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}}+C$

21.- $\int x\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx = \qquad 2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\operatorname{sen}\sqrt{x}+C$

22.- $\int \frac{x\,e^{\operatorname{arctg}x}}{\left(1+x^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \qquad -\frac{(1-x)\,e^{\operatorname{arctg}x}}{2\sqrt{1+x^{2}}}+C$

1.2.3 Integrales Trigonométricas Corrientes.

Recordemos las principales relaciones entre las funciones trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \operatorname{co}\sec^2 x$ $\qquad$ $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$\cos^2 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\qquad$ $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ $\qquad$ $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

Ejemplo 1: Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

Resolución : $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

Ejemplo 2: Calcular $\int \cos^2 dx$

Resolución : $\int \cos^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

Ejemplo 3: Calcular $\int \cos^2 2x \, dx$

Resolución : $\int \cos^2 2x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + C$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C$$

Ejemplo 4: Calcular $\int \tan x \, dx$

Resolución : $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx =$

$u = \cos x \qquad du = - \operatorname{sen} x \, dx$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln u + C = -\ln u + C = -\ln \cos + C$$

$$= \ln \frac{1}{\cos x} + C = \ln \sec x + C$$

Ejemplo **5:** Calcular $\int \sec^3 x\, dx$

Resolución **:** Usando integración por partes:

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 dx$$

$$\therefore \quad du = \sec x \,\mathrm{tg}\, x\, dx \qquad \therefore\ v = \mathrm{tg}\, x$$

$$\therefore \int \sec^3 x\, dx = \sec x \cdot \mathrm{tg}x - \int \mathrm{tg}\, x \cdot \sec x \cdot \mathrm{tg}\, x\, dx$$

$$= \sec x \cdot \mathrm{tg}x - \int \sec x \cdot \mathrm{tg}^2 x\, dx$$

$$= \sec x \cdot \mathrm{tg}x - \int \sec x \cdot \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \cdot \mathrm{tg}x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \cdot \mathrm{tg}x + \int \sec x\, dx$$

$$= \sec x \cdot \mathrm{tg}x + \ln(\sec x + \mathrm{tg}\, x) + C$$

$$\therefore \int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2} \sec x \cdot \mathrm{tg}x + \frac{1}{2} \ln(\sec x + \mathrm{tg}\, x) + C$$

1.2.3 Integración usando Sustituciones Trigonométricas.

La integración por sustitución consiste en sustituir la variable de integración con una nueva variable.
Existen muchos tipos de sustituciones. Las sustituciones trigonométricas que usaremos, las aplicaremos cuando en él integrando aparezca una sola raíz de la forma:

$$\sqrt{a^2+b^2u^2}\ ,\quad \text{con } u=u(x), \text{ la sustitucion sera}: u=\frac{a}{b}\operatorname{tg} z$$

$$\sqrt{a^2-b^2u^2}\ ,\quad \text{con } u=u(x), \text{ la sustitucion sera}: u=\frac{a}{b}\operatorname{sen} z$$

$$\sqrt{b^2u^2-a^2}\ ,\quad \text{con } u=u(x), \text{ la sustitucion sera}: u=\frac{a}{b}\sec z$$

Al aplicar la sustitución se suponen: $a, b \in \mathbb{R}^+$. En el resultado final se vuelve a la variable x .

Ejemplo **1:** Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$

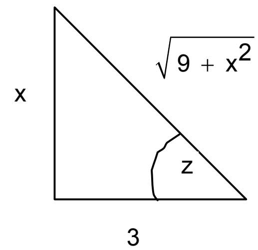
Resolución **:** Primer caso: a = 3, b = 1, u = x, $\therefore$ $x=\frac{3}{1}\operatorname{tg} z,\ dx=3\sec^2 z\, dz$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}} = \int\frac{3\sec^2 z\,dz}{9\operatorname{tg}^2\cdot\sqrt{9+9\operatorname{tg}^2 z}} = \frac{1}{9}\int \operatorname{cosec} z \cot z\, dz$$

$$= -\frac{1}{9}\left(-\operatorname{cosec}\ z\right)+C$$

volviendo a la variable x, dx x = 3 tg z obtenemos tg z = $\frac{x}{3}$

$\therefore$



$$\therefore \quad \operatorname{cosec} z = \frac{\sqrt{9+x^2}}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}$$

Ejemplo **2:** Calcular $\int \sqrt{7-x^2}\ dx$

Resolución **:** Segundo caso: $a = \sqrt{7}$, $b = 1$, $u = x$,

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{7}}{1}\ \text{sen } z, \quad x = \sqrt{7}\ \text{sen}\, z \quad \therefore \quad dx = \sqrt{7}\ \cos z\ dz$$

$$\int \sqrt{7-x^2} = \int \sqrt{7-\left(\sqrt{7}\,\text{sen}\, z\right)^2}\cdot\sqrt{7}\ \cos z\ dz =$$

$$\int \sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{1-\text{sen}^2 z}\ \cos z\ dz = 7\int \cos^2 z\ dz =$$

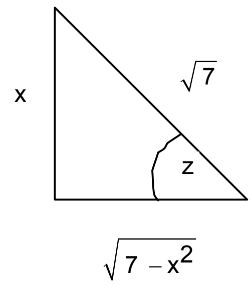
$$7\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2z\right)dz = \frac{7}{2}\int dz + \frac{7}{2}\int \cos 2z\ dz =$$

$$\frac{7}{2}z + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}\text{sen}\, 2z + C = \frac{7}{2}z + \frac{7}{4}\ \text{sen}\, 2z + C =$$

$$\frac{7}{2}z + \frac{7}{4}\ 2\,\text{sen}\, z\ \cos z + C$$

volviendo a la variable x, dx $x = \sqrt{7}\,\text{sen}\, z$ obtenemos $\text{sen } z = \dfrac{x}{\sqrt{7}}$

$\therefore$



De $\operatorname{sen} z = \dfrac{x}{\sqrt{7}}$ obtenemos $z = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{7}}\right)$, y del triangulo : $\cos z = \dfrac{\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{7}}$.

Sustituyendo estos valores en $(*)$ obtenemos: